FELADATLAP **Görbék és felületek elmélete**

Görbék [1]

1. Határozzuk meg a d út természetét (út vagy görbe, regularitása, egyszerűsége), ha

a) $x = \dfrac{2+t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$;

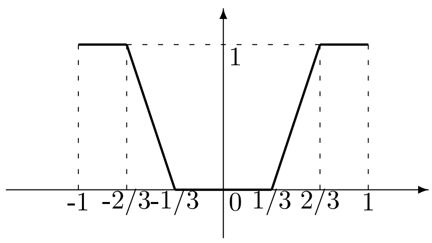
b) $x = t$, $y = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ahol $f(t) = \begin{cases} 0, & \text{ha } t \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } t \in \mathbb{I} \end{cases}$

c) $x(t) = 5t - t^5, y(t) = 2t^2 - t^4$;

d) $x = \dfrac{1}{2} f(3^0 t) + \dfrac{1}{2^2} f(3^2 t) + \dfrac{1}{2^3} f(3^4 t) + ...,$

$y = \dfrac{1}{2} f(3^1 t) + \dfrac{1}{2^2} f(3^3 t) + \dfrac{1}{2^3} f(3^5 t) + ...(0 \le t \le 1),$

ahol f egy folytonos, 2 periódusú függvény az I=[-1,1] intervallumon, amelyet a mellékelt ábra ad meg.



e) $x(t) = \dfrac{3t - t^3}{4} - \dfrac{3t}{1+t^2}$, $y(t) = \dfrac{3t^2 - 1}{4} + \dfrac{3}{1+t^2}, t \in \mathbb{R}$;

f) $y(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, x \in \mathbb{R}^*$;

g) $x(\theta) = 3a \cos 2\theta, y(\theta) = 2a \cos 3\theta, \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

2. Határozzuk meg az alábbi görbék szinguláris pontjait (ha léteznek):

a) $c(t) = \left(\frac{t^2}{t^2-1}, \frac{t^2}{t^2-1}\right), \quad t \in \mathbb{R}$;

b)$c(t) = (t^2, 6t^3 + 2t), t \in \mathbb{R}$;

c) $\vec{r} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j} + 4a \cos \frac{t}{2} \vec{k}, t \in \mathbb{R}$.

3. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű (zárt) paraméterezett görbével ekvivalens paraméterezett görbe egyszerű (zárt). Alkalmazás: Bizonyítsuk be, hogy a $c(t) = \left(\dfrac{4t^2}{(1-t^2)^2}, \dfrac{8t^3}{(1-t^2)^3}\right), \quad t \in (-1, 1)$ paraméterezett görbe egyszerű, felhasználva, hogy a $c(t) = (t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$ görbe egyszerű.

4. Vizsgáljuk meg, hogy a következő görbék ekvivalensek-e:

a)

$$c_1 : x(\tau) = \tfrac{\sin\tau\cos^2\tau}{\sin^3\tau + \cos^3\tau}, \quad y(\tau) = \tfrac{\sin^2\tau\cos\tau}{\sin^3\tau+\cos^3\tau}, \ \tau \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right);$$
$$c_2 : \ x(t) = \tfrac{2t(1-t^2)^2}{8t^3+(1-t^2)^3}, \quad y(t) = \tfrac{4t^2(1-t^2)}{8t^3+(1-t^2)^3}, \ t \in \ (0, 1).$$

b)

$$c_1 : x(\tau) = \tau, \qquad y(\tau) = b\sqrt{1 - \tfrac{t^2}{a^2}}, \ \tau \in \ [-a, a];$$
$$c_2 : x(t) = a\cos t, \quad y(t) = b\sin t, \ t \in \ [\pi, 2\pi];$$
$$c_3 : x(\theta) = a\cos\theta, \quad y(\theta) = b\sin\theta, \ \theta \in \ [0, 2\pi], \quad a, b > 0.$$

5. Paraméterezzük a következő halmazokat, tudva, hogya paraméterezett görbék pontjainak halmaza:

a) $\left\{(x, y)|(y-1)^3 + 27(x-2)^2 = 0\right\}$;

b) $\left\{(x, y)|x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0\right\}$;

c) $\left\{(x, y)|x^2 - y^3 - 3x + 2 = 0\right\}$.

6. a) Egy R sugarú kör csúszás nélkül gördül egy d egyenesen. Paraméterezzük azt a görbét, amelyet a kör egy pontja ír le (*Ciklois*)!

b) Hogyan változik a görbe, ha a vizsgált pont a kör belsejében, illetve a körön kívül található?

---

[1] Példák görbékre: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_curves

7. a) Paraméterezzük azt a görbét, amelyet egy r sugarú kör egy pontja ír le, amely egy R sugarú körön gurul csúszás nélkül (*Epiciklois*)!
b) Paraméterezzük azt a görbét, amelyet egy r sugarú kör egy pontja ír le, amely egy R sugarú kör belsejében gurul csúszásmentesen (*Hipociklois*)!

8. a) Határozzuk meg a ciklois, epiciklois és hipociklois szinguláris pontjait!
b) Igazoljuk, hogy a ciklois M pontjába szerkesztett normális a d egyenest pontosan a kör és az egyenes érintkezési pontjában metszi!
c) Igazoljuk, hogy az epiciklois és hipociklois M pontjába szerkesztett normálisok átmennek a mozgó és a rögzített kör érintkezési pontján!
d) Igazoljuk, hogy ha az $\frac{R}{r}$ racionális szám, akkor az epiciklois és hipociklois periodikus.

9. Egy M pont egyenletesen mozog az ON egyenes mentén, mely egyenletesen forog az O pont körül. Határozzuk meg az M pont nyomának az egyenletét (*Archimédesz-féle spirál*)!

10. Egy OL egyenes egyenletesen forog az O pont körül ω állandó szögsebességgel. Az M pont az OL egyenesen mozog az OM szakasz hosszával arányos sebességgel. Határozzuk meg az M pont nyomának az egyenletét (*Logaritmikus spirál*)!

11. Igazoljuk, hogy:
a) Az Archimédesz féle spirál két egymást követő spirálja közti távolság állandó ugyanazon $\overline{ON}$ vektor mentén, ahol O a spirál kezdőpontja.

b) A logaritmikus spirál ($\rho = e^{a\theta}$) esetén:

1. Ha a θ értékek számtani haladvány szerint nőnek, akkor a megfelelő ρ értékek mértani haladványban vannak.(Ennek alapján a logaritmikus spirált a következőképpen is meg lehet szerkeszteni. Először meghatározzuk az $A(c,\ 0)$ és $B(0, ce^{a\frac{\pi}{2}})$ pontokat. A B pontban merőlegest szerkesztünk az AB szakaszra, amely a $\theta = \pi$ egyenest C pontban metszi és C rajta van a spirálon. Utána a BC szakaszra emelünk merőlegest a C pontban. Ez a merőleges a $\theta = 3\pi/2$ egyenest D pontban metszi és ez a pont is rajta lesz a spirálon és így tovább. Miért lesznek a kapott pontok a spirálon?)
2. Két egymást követő spirál távolságainak aránya állandó ugyanazon$\overline{ON}$ vektor mentén.

12. Egy tetszőleges OE egyenes metszi az $x^2 + (y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4}$ kört és a körnek az O ponttal átmérősen ellentett C pontjába húzott érintőt a D, valamit E pontokban. A D és E pontokban párhuzamosokat húzunk az Ox illetve Oy tengelyekhez, melyek az M pontban metszik egymást. Határozzuk meg az M pont által generált görbe egyenletét (*Maria Agnesi-féle görbe*)!

13. Legyen C egy kör és d egy érintője a körnek. A kör egy O pontjából, amely a kör d-re merőleges átmérőjén és a körön van, szelőt húzunk. A szelő metszi a kört és a d egyenest A és B pontokban. Legyen M az a pont a szelőről, amelyikre teljesül az $OM = AB$ egyenlőség. Határozzuk meg azon M pont mértani helyét (Dioklész ciszoidája)!
14. Egy M pont úgy mozog a síkban, hogy közben két rögzített ponttól (F_1és F_2, $d(F_1, F_2) = 2b$) mért távolságainak szorzata állandó, egyenlő a^2-tel. Határozzuk meg az M pont által leírt görbe egyenletét. (Ez a görbe Cassini oválisai nevet viseli. Ha *a=b,* akkor a kapott görbe Bernoulli lemniszkátája).

15. Adjuk meg az $\vec{r}(t)$görbe egyenletét, ha
a) $\vec{r}'(t) = \alpha(t)\vec{a}$, ahol α(t)>0 folytonos.
b) $\vec{r}''(t) = \vec{a}$ =áll.

16. Számítsuk ki az alábbi görbék hosszát:

a) $y = x^{\frac{3}{2}}$, a [0,2] intervallumon;
b) $y = \ln x$, az [1,2] intervallumon;
c) $\vec{r}(t) = (a(\cos t + t)\sin t), a(\sin t - t\cos t))$ a [0,π] intervallumon.

17. Számítsuk ki a $c(\alpha) = (-f'(\alpha)\sin\alpha - f''(\alpha)\cos\alpha, f'(\alpha)\cos\alpha - f''(\alpha)\sin\alpha)$ görbe hosszát a [0,α] intervallumon!

18. Határozzuk meg az epiciklois és hipociklois esetén egy-egy görbeív hosszát a $t = 0$ értéknek megfelelő pont és az aktuális pont között, majd egy-egy "hurok" hosszát. Innen kiindulva számítsuk ki a szívgörbe és az asztroida hosszát.

19. Adjuk meg az $\begin{cases} x^3 - 3a^2y = 0 \\ 2xz - a^2 = 0 \end{cases}$ görbe hosszúságát az $y = \frac{a}{3}$ illetve az $y = 9a$ síkok közt!

20. Legyen C egy síkgörbe, M_0 egy pont a görbén és xOy egy derékszögű koordináta-rendszer a

görbe síkjában. Jelöljük az M_0 pontban a görbéhez húzott érintőnek és normálisának az Ox tengellyel való metszéspontjait T illetve N-nel. Legyen P az M_0 pontnak az Ox tengelyre való ortogonális projekciója. Határozzuk meg C görbe egyenletét, ha:

a) a PN szubnormális állandó és egyenlő a-val;
b) a PT szubtangens állandó és egyenlő a-val;
c) az M_0N normális állandó és egyenlő a-val;
d) az M_0T érintő állandó és egyenlő a-val
(bármely M_0 pontra a görbéről)!

21. Egy síkgörbe egyenlete $\overrightarrow{r}$=($\varphi(t)$,$t\varphi(t)$). Milyen feltételek mellett határoz meg ez az egyenlet egy egyenes vonalat?

22. Legyen az $\overrightarrow{r}(t)$ egy folytonos görbe az [a, b] intervallumon úgy, hogy az $\overrightarrow{r}$||$\overrightarrow{r}$', $\overrightarrow{r}$'? 0, $\overrightarrow{r}$? 0. Igazoljuk, hogy az $\overrightarrow{r}$(t) egy egyenest ábrázol!

23. Írjuk fel az alábbi görbék érintőinek, normálisainak egyenletét:

a) $r(t)$ = (a.cos t, b.sin t) (*ellipszis*);
b) $r(t)$ = (a.cos3 t, b.sin3 t) (*asztroida*);
c) $r(t)$ = ($a.\varphi$.cos φ, $a.\varphi$.sin φ) (*archimédeszi spirál*)
d) $r(t)$ = (a(t – sin t), a(t – cos t)) (*ciklois*)!

24. Írjuk fel az $\overrightarrow{r}(u)$=(u3–u2–5, 3u2+1, 2u3–16) görbe érintőjének és normálsíkjának egyenletét egy pontban, ahol u=2 !

25. Írjuk fel az $\overrightarrow{r}(u)$=(u2–2u+3, u3–2u2+u, 2u3–6u+2) görbe érintőjének normálsíkjának és simuló síkjának az egyenletét a görbe A(2,0,-2) pontjában !

26. Mutassuk ki, hogy az $\overrightarrow{r}(u) = (au + b, cu + d, u^2)$ görbének ugyanaz a simuló síkja minden pontban!

27. Mutassuk ki, hogy az $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}(a > 0)$ asztroida érintőjének a koordináta-tengelyek közé eső szakaszának hossza egyenlő a-val !

28. Két pont úgy mozog a térben, hogy a köztük levő távolság állandó marad. Mutassuk ki, hogy a sebességüknek a vetülete az általuk meghatározott egyenesre egyenlő!

29. Határozzuk meg az $\overrightarrow{r}(t)$=(t2, 1–t, t3) görbe érintőjének, normálsíkjának, binormálisának, simuló síkjának, főnormálisának és rektifikálható síkjának az egyenletét a t=1 pontban!

30. Határozzuk meg az $\overrightarrow{r}(t)$=(a.cos t, a.sin t, $b.t$) érintőjének, normálsíkjának, simuló síkjának, binormálisának, simuló síkjának, főnormálisának és rektifikálható síkjának az egyenletét ($\overrightarrow{r}$ csavargörbe)!

31. Legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ egy görbe. Igazoljuk, hogy az alábbi állítások egyenértékűek:

a) a görbe bármely pontjába szerkesztett normálsík átmegy egy rögzített ponton;

b) a görbe geometriai képe egy gömbön helyezkedik el.

32. Legyen f egy C 1 osztályú zárt görbe. Mutassuk ki, hogy bármely $\overrightarrow{a}$≠0 vektorra létezik egy x∈f pont úgy, hogy az érintő egyenes x-ben merőleges $\overrightarrow{a}$-ra!

33. Mutassuk ki, hogy az $r = a$(1+cos φ), $r = a$(1–cos φ) polárkorrdinátákkal megadott szívgörbék a metszéspontokban merőlegesek egymásra!

34. Mekkora szögben metszik egymást a $x2 = 4y$ és $y = \frac{8}{x^2+4}$ görbék?

35. Mekkora szögben metszik egymást a $x2 + y2 = 8x$ és $y\ 2 = \frac{x^3}{2-x}$ görbék?

36. Határozzuk meg a következő görbék Frenét koordináta-rendszerének elemeit (a koordinátatengelyeinek és koordináta-síkjainak az egyenleteit). Számítsuk ki a görbék görbületét és torzióját!

a) $\overrightarrow{r}(t)$=(t–sin t, 1–cos t, 4sin$\frac{t}{2}$);

b) $\overrightarrow{r}(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2})$;

c) $\overrightarrow{r}(t) = (3t^2 - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$;

d) $\overrightarrow{r}(t) = \cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$.

37. Egy görbét a $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y=0$ differenciálegyenletet ad meg. Határozzuk meg a görbe görbületét!

38. Határozzuk meg az $F(x,y)$=0 alakban megadott görbe görbületét!

39. Határozzuk meg az állandó görbületű görbéket a síkban!

40. Számítsuk ki a kör görbületi sugarát!

41. Az ellipszis melyik pontjában a legnagyobb és melyikben a legkisebb a görbület?

42. A b milyen értékére lesz az $r(t) = (a\cos t,\ a\sin t,\ bt)$ csavargörbe torziója maximális (a >0 és állandó)?

43. Igazoljuk, hogy egy görbe síkgörbe akkor és csakis akkor, ha a torziója nulla!

44. (*Lancrét tétele*) Legyen $c : I \to \mathbb{R}^3$ egy általános helyzetű görbe, $K_1(t)$ a görbe görbülete, $K_2(t)$ a görbe torziója a $c(t)$ pontban. Feltételezve, hogy $K_2(t) \neq 0$ bármely $t \in I$ esetén igazoljuk, hogy az alábbi állítások egyenértékűek:
(i) az érintő állandó szöget zár be egy fix iránnyal;
(ii) a főnormális merőleges egy fix irányra;
(iii) a binormális állandó szöget zár be egy fix iránnyal;
(iv) $\frac{K_1(t)}{K_2(t)} = k =$ áll.
(Az olyan görbét, amelyre teljesül valamelyik a fenti állítások közül *csavarvonal*nak nevezzük.)

45. Igazoljuk, hogy az alábbi görbék mentén a görbület és a torzió megegyezik:

a) $x = 2t, y = t^2,\ z = \ln\ t,\ t>0$;

b) $x = u, y = \frac{u^2}{2},\ z = \frac{u^3}{6}, \quad u \in \mathbb{R}$.

46. Igazoljuk, hogy az $x = u, y = u^2, z = \frac{1}{u^3}(u \neq 0)$ görbe mentén a $\frac{d^2(u)}{K_2(u)}$ hányados állandó, ahol $d(u)$ az origó távolságát jelöli a görbe $c(u)$ pontjába szerkesztett simuló síktól (*Ţiţeica görbe*).

47. Vezessük le az $F(x, y) = 0$ alakban megadott görbe érintőjének illetve normálsíkjának egyenletét a görbe adott pontjában!

48. Vezessük le az $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$ alakban megadott görbe érintőjének illetve normálsíkjának egyenletét a görbe adott pontjában!

49. Írjuk fel az $x^3 - xy^2 + 2x + y - 3 = 0$ görbe érintőjének illetve normálsíkjának egyenletét a görbének az Ox tengellyel való metszéspontjában!

50. Határozd meg a Viviani-görbe érintőjének illetve normálsíkjának egyenletét a görbe adott pontjában! A Viviani-görbe: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ x^2 + y^2 = rx \end{cases}$.

51. Számítsuk ki az alábbi görbék hosszát:

a) $y = a\ \cosh \frac{x}{a}$ (láncgörbe), a $[0, a]$ intervallumon

b) $\begin{cases} x(t) = a(\ln\tan\frac{t}{2} + \cos t) \\ y(t) = a\sin t \end{cases}$ (traktrix-görbe) a $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ intervallumon.

52. Mely pontban fogja az $y = x^2$ egyenletű parabola az Ox tengelyt $45°$-os szögben metszeni?

53. Határozd meg az $y = \frac{1}{1+x^2}$ görbe érintőjének egyenletét az $y = \frac{1}{1+x}$ egyenlettel adott hiperbolával való metszéspontjaiban!

54. Határozd meg a $(C): \begin{cases} xz = 1 \\ y = \ln z \end{cases}$ görbe azon pontjait, melyek esetén a főnormális párhuzamos a $(P): 5x + 2y - 5z = 0$ síkkal!

55. Számítsd ki:

   a) a $(C_1): y = e^x$ illetve $(C_2): y = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ görbék görbületét és torzióját a görbék metszéspontjában

   b) a $c(t) = (t\cos(a\ln t), t\sin(a\ln t), bt)$ görbe görbületét és torzióját a $t = 1$ pontban

   c) az $\overrightarrow{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ csavargörbe torziójának és görbületének arányát!

56. Számítsuk ki a Viviani-görbe görbületét és torzióját a görbe egy adott pontjában!

57. Adott a következő görbe: $\begin{cases} x = p\sqrt{p^2 - q^2}\cos t \\ y = q\sqrt{p^2 - q^2}(1 + \sin t) \\ z = \sqrt{p^2 - q^2}(1 + \sin t) \end{cases}$ $p, q =$ állandó, $p > q$ Igazoljuk, hogy ez a görbe egy kör!

58. Írjuk fel a főnormális és binormális egyenletét a megadott pontokban:

   a) $x = t, y = t^2, z = t^3, t = 1$

   b) $x = t, y = t^2, z = e^t, t = 0$

59. Határozzuk meg a $c(t) = (\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2})$ görbe azon pontjait, melyek esetén a görbéhez húzott érintő párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ síkkal!

60. Határozzuk meg a következő görbék normálsíkjának, simulósíkjának és rektifikálható síkjának az egyenletét:

   a) $\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2x \end{cases}$ az $M(2, 4, 4)$ pontban

   b) $\overrightarrow{r}(t) = (\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2})$, az $M(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ pontban.

61. Határozzuk meg az $\overrightarrow{r}(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1, 3(t^2 - 1), 3(t - 1)^2)$ görbe érintősíkjának, normálsíkjának, binormálisának, simulósíkjának, főnormálisának és rektifikálható síkjának az egyenletét a $t = 1$ pontban.

62. Határozzuk meg az $\overrightarrow{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, e^t + e^{-t})$ görbe Frénet-féle koordináta-rendszerének elemeit!

63. Határozzuk meg a következő görbék érintkezési rendjét az origóban:

   a) $y = e^{-x^2}, y = \frac{1}{1+x^2}$

   b) $y = x^4, y = x^2 \cdot \sin x$

   c) $y = \ln(1 + x), y = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$

64. a) Határozzuk meg az $y = \sin x$ és $(x - \frac{\pi}{2}) + y^2 = 1$ görbék érintkezési rendjét az $A(\frac{\pi}{2}, 1)$ pontban!

   b) Határozzuk meg az $y = \frac{x^2}{2a} + a$ egyenletű parabola és az $y = a\cosh\frac{x}{a}$ egyenletű láncgörbe érintkezési rendjét a $V(0, 1)$ pontban!

65. Határozzuk meg a következő görbék simulókörét a megadott pontokban:

   a) $x = \sin t, y = \cos 2t, t = \frac{\pi}{6}$

   b) $y = \sin x, P(\frac{\pi}{2}, 1)$

c) $y = \arctan x, x = 1$

66. Igaz vagy hamis?

A Viviani görbe: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2 \\ x^2+y^2=rx \end{cases}$ paraméteres egyenlete:

$$\begin{cases} x = \frac{a}{2}\cdot(1+\cos t) \\ y = \frac{a}{2}\cdot \sin t \\ z = -a\cdot\sin\frac{t}{2}, t\in[0,2\pi]. \end{cases}$$

67. Határozzuk meg az $y = a\cosh\frac{x}{a}$ egyenletű láncgörbe simulókörét a görbe adott pontjában!

68. Határozzuk meg az $y = mx + \frac{p}{mx}$ egyenescsalád burkolóját, ahol m változó paraméter!

69. Határozzuk meg az $y = 2x - \frac{x^2}{20}(1+\alpha^2)$ parabolacsalád burkolóját!

70. Adott a $(C) : x(t) = 1+t^3, y(t) = t^2+t^3, z(t) = 5t^3+2t^2+3, t\in\mathbb{R}$ görbe. Melyik igaz az alábbi állítások közül?

   a) benne van az $x+8y-10z-3=0$ síkban
   b) érinti a $3x+2y+z-1=0$ síkot
   c) benne van a $3x+2y-z=0$ síkban
   d) metszi a $3x+2y-z=0$ síkot két pontban

71. Legyen a következő görbe: $c(t) = (\frac{1+t}{1-t}, \frac{1}{1-t^2}, \frac{1}{1+t}), t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ és az $x^2-4y+2z+3=0$ sík. Ekkor:

   a) a görbe metszi a síkot az $A(1,-\frac{1}{2},-3)$ pontban
   b) a sík érinti a görbét az $M(1,0,-2)$ pontban
   c) a görbe benne van a síkban.

72. Adott a $(C) : \begin{cases} x^2+z^2-4=0 \\ x^2+y^2-4=0 \end{cases}$ görbe. Válasszuk ki az $M(\sqrt{3},1,1)$ pontban a görbéhez húzott érintő- illetve normálsík egyenletét:

   a) é: $\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{1}$ n: $\sqrt{3}x+\sqrt{3}y-z-1=0$
   b) é: $\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{\sqrt{3}}$ n: $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}z-1=0$
   c) é: $\frac{x-\sqrt{3}}{1} = \frac{y-1}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{\sqrt{3}}$ n: x+$\sqrt{3}y+\sqrt{3}z-\sqrt{3}=0$
   d) é: $\frac{x-\sqrt{3}}{-1} = \frac{y-1}{\sqrt{3}} = \frac{z-1}{\sqrt{3}}$ n: x-$\sqrt{3}y-\sqrt{3}z+\sqrt{3}=0$

73. Legyen a következő görbe: $(C) : \begin{cases} x(t) = 4(t+\frac{t^3}{3}) \\ y(t) = (1+t^2)^2 \end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$. Jelöljük R-el a görbe adott pontjához tartozó görbületi sugarat. Ekkor:

   a) $R = 4y^{\frac{2}{3}}$
   b) $R = 4y^{\frac{3}{2}}$
   c) $R = 4y^{\frac{5}{4}}$
   d) $R = 4y^{\frac{4}{5}}$

74. Igaz vagy hamis?

Az $x^3-y^3+2xy=0$ görbe görbülete, illetve görbületi sugara az $M(1,-1)$ pontban: $K_1 = \frac{\sqrt{2}}{8}$, $R = 4\sqrt{2}$.

75. Az alábbi görbék közül melyik adja azon körök burkolójának egyenletét, melyek középpontja az $x^2+y^2=R^2$ sugarú körön van, sugara pedig r:

   a) $x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$
   b) $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$

c) $y = a\cosh\frac{x}{a}$

d) egyik sem a fentiek közül.

76. Igazoljuk, hogy az $\vec{F} = F\vec{r}$, (F állandó) centrális erő egy síkgörbét határoz meg!

77. Igazoljuk, hogy az $\vec{F}(t) = F_1(t)\vec{r}(t)$ erő egy síkgörbét határoz meg!

78. a) Mutassuk ki, hogy ha egy görbe összes normálsíkjai tartalmaznak egy közös $\vec{e}$ vektort, akkor a görbe egy egyenes vonal vagy egy síkgörbe!

    b) Mutassuk ki, hogy ha egy görbe nem egyenes vonal és ha a görbe simuló síkjai tartalmaznak egy közös vektort, akkor a görbe síkgörbe!

79. Határozzuk meg az $r = f(\varphi)$ polárkoordinátákban megadott görbe görbületének a képletét és alkalmazzuk ezt a képletet a következő görbék görbületének a kiszámítására a $\varphi = 0$ pontban:

    (1) $r = a\varphi$;

    (2) $r = a\varphi^k$;

    (3) $r = a^{\varphi}$.

80. Az $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, z = 4\sin\frac{t}{2}$ görbe minden pontjában a főnormális pozitív irányában felmérünk egy szakaszt, melynek hossza négyszer akkora mint a görbe görbülete abban a pontban. Határozzuk meg a szakasz végpontja által leírt görbe simuló síkját!

81. Tekintsük a $c : t \in \mathbb{R} \to c(t) = (t, \frac{a}{2}(e^{\frac{t}{a}} + e^{-\frac{t}{a}})) \in \mathbb{R}^2$, $a =$ állandó> 0 görbét.

    a) Határozzuk meg a görbe görbületi sugarát egy tetszőleges pontban.

    b) Írjuk fel a simuló sík egyenletét a $c(0)$ pontban.

    c) Mutassuk ki, hogy egy tetszőleges $c(t)$ pont görbületi sugara egyenlő a normális $c(t)$ pontja és az Ox tengely közé eső szakaszának a hosszával.

82. Határozzuk meg az $xy = z^2,\ x^2 + y^2 = 2z$ görbe simuló gömbjét a $P(1, 1, 1)$ pontban!

83. Határozzuk meg az alábbi görbék simuló gömbjét és simuló körét a megadott pontban

    a) $x = t,\ y = ln(1 + t),\ z = e^t - 1\ ,\ M_0 = (0, 0, 0)$;

    b) $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), z = 4a\cos\frac{t}{2}$ a görbe egy tetszőleges pontjában.

84. Határozzuk meg az $x^3 = 3a^2y, 2xz = a^2$ görbe simuló gömbjének sugarát!

85. Írjuk fel a $c(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t, \cos 2t)$ görbe simuló körének egyenletét!

86. Határozzuk meg a $C_\alpha : (x - \alpha)^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha^2$ görbesereg burkolóját!

87. Határozzuk meg az alábbi görbecsalád diszkriminâns pontjainak mértani helyét:

$$C_\alpha : F(x, y, \alpha) = (y - \alpha)^2 + (x - \alpha^2)^3 = 0.$$

88. Határozzuk meg annak azon körcsalád burkolóját, amely esetén a körök áthaladnak az origón és közeppontjuk rajta van az $(x - a)^2 + y^2 = R^2$ körön!

89. Határozzuk meg az $\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0$ egyenescsalád burkolóját, tudva, hogy az α és β közt fennáll az $\alpha^m + \beta^m = a^m$ összefüggés. Vizsgáljuk külön a következő sajátos eseteket: $m = 2,\ m = 1,\ m = -2$.

90. Határozzuk meg azon ellipszisek burkolóját, amelyeknek megegyezik a főtengelyük és főatmérőik hosszának összege állandó!

91. Határozzuk meg azon egyenesek burkolóját, amelyek a derékszögből állandó területű háromszöget metszenek ki!

92. Egymással párhuzamos, egy síkban levő fénysugarak vetítődnek egy a fénysugarak síkjában található körre. Határozzuk meg a körről visszaverődő fénysugarak burkolóját!

93. Határozzuk meg a következő görbecsaládok burkolóit:

    a) $c(t) = (\frac{t^2}{4} + \alpha, \frac{4t^3}{3} + \frac{\alpha^2}{2}, 4t^4 + \frac{\alpha^3}{6})$;

b) $c(t) = (\cos t, \sin t, \alpha t - (1+\alpha)^2 \frac{t^2}{4})$.

94. Határozzuk meg az alábbi görbék evolutáját:

   a) $c(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t)), t \in (0, \pi), a > 0$ (ciklois);
   b) $c(t) = (a \cos t, b \sin t), t \in \mathbb{R}$ (ellipszis);
   c) $c(t) = (a \cos^3 t, a \sin^3 t), t \in (0, \pi/2)$ (asztroida).

95. Határozzuk meg az $y = a \ln \cos \frac{x}{a}$ láncgörbe evolutáját!

96. Határozzuk meg az $r = a(1 + \cos \varphi)$ poláris egyenlettel megadott szívgörbe evolutáját!

97. Határozzuk meg a láncgörbe és a kör evolvenseit!

98. Határozzuk meg a következő görbék természetes paraméterezését és természetes egyenletét:
   a) $c(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t))$;
   b) $c(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ (ciklois);
   c) asztroida;
   d) szívgörbe. E: a) $R^2 = 2as$, b) $R^2 = (8R - s)s$, c) $3R^2 = 2s(3a - 2s)$.

99. Határozzuk meg a következő természetes egyenletekkel megadott görbék analitikus egyenleteit.

$$\begin{array}{lll} a) aR = s^2 + a^2; & b) R^2 + s^2 = 16a^2; & c) R^2 = 2as; \\ d) R^2 + a^2 = a^2 e^{\frac{2s}{a}}; & e) R = as; & f) \frac{s^2}{a^2} + \frac{R^2}{b^2} = 1; \\ g) Rs = a^2; & h) 9R^2 + s^2 = 16a^2. & \end{array}$$

100. Határozzuk meg azon $c : I \to \mathbb{R}^2$ síkgörbéket, amelyek esetén
   a) $K_1(s) = 0, \forall s \in I$;
   b) $K_1(s) = k, \forall s \in I$, ahol $k > 0$ állandó ;
   c) $K_1(s) = \frac{a}{a^2+s^2}, \forall s \in I$ ahol $a > 0$ állandó.